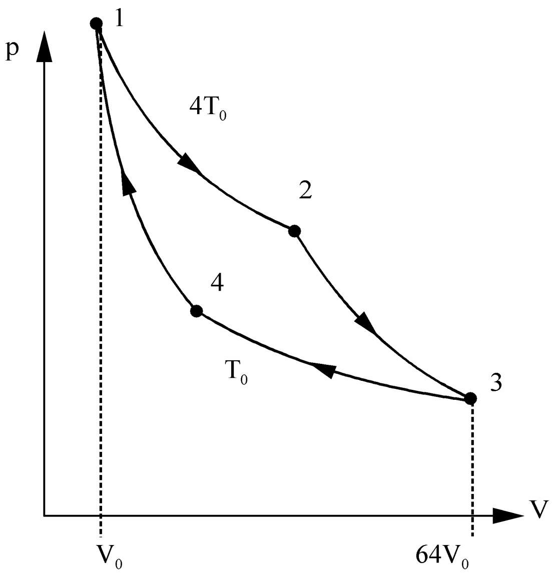
S-114.1327 Fysiikka III (EST) , Tentti 30.8.2006

1. Lämpövoimakone toteuttaa oheisen kuvan Carnotin prosessia. Koneessa on työaineena yksi mooli ideaalikaasua. Laske yksiatomisen kaasun kierroksen aikana tekemän työn suhde kaksiatomisen kaasun kierroksen aikana tekemään työhön.



Ratkaisu

Yksiatomista ideaalikaasua käyttävälle koneelle

$$W = R(T_Y - T_A)\ln(V_2/V_1)$$

missä $T_Y = 4T_0$ ja $T_A = T_0$ ovat ylemmän ja alemman lämpövaraston lämpötilat ja V_2 on yksiatomisen kaasun tilavuus pisteessä 2. Olkoon vastaavasti V_2' kaksiatomisen kaasun tilavuus pisteessä 2. Tällöin kaksiatomisen kaasun tekemä työ on

$$W' = R(T_Y - T_A)\ln(V_2'/V_1)$$

Kaasujen tekemien töiden suhde on siis

$$\frac{W}{W'} = \frac{\ln(V_2/V_1)}{\ln(V_2'/V_1)} \qquad (1)$$

Kaasujen tilavuudet pisteessä 2 ovat siis erilaiset. Tämä johtuu siitä, että adiabaattivakiot ovat erilaiset ja kaasuilla on keskenään sama tilavuus pisteissä 1 ja 3. Piste 2 ei siis ole samalla adiabaatilla. Olkoon yksi- ja kaksiatomisen kaasun adiabaattivakiot $\gamma = 1{,}667$ ja $\gamma' = 1{,}400$ vastaavasti. Tällöin adiabaattisesta laajenemisesta saadaan

$$\begin{aligned} 4T_0V_2^{\gamma-1} &= T_0V_3^{\gamma-1} \\ 4T_0V_2'^{\gamma'-1} &= T_0V_3^{\gamma'-1} \end{aligned}.$$

Ratkaisemalla tästä tilavuudet pisteessä 2 ja sijoittamalla ne suhteeseen (1) ja saamme

$$V_2 = V_3 4^{1/(1-\gamma)}$$

$$V_2' = V_3 4^{1/(1-\gamma')}$$

Sijoittamalla nämä ja $V_3 = 64V_1$ yhtälöön (1)

$$\frac{W}{W'} = \frac{3+1/(1-\gamma)}{3+1/(1-\gamma')}$$

Sijoittamalla adiabaattivakiot saamme $\frac{W}{W'} = 3$.

2. Laske entropian muutos, kun m_1 moolia nestettä, jonka lämpötila on T_1 sekoitetaan avoimessa, mutta lämpöeristetyssä astiassa m_2 mooliin samaa nestettä, jonka lämpötila on T_2. Nesteen moolinen lämpökapasiteetti on C_m.

Ratkaisu

Sekoittuessaan nesteet vaihtavat lämpöä keskenään. Isobaariselle prosesessille

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{mc_p \Delta T}{T}. \tag{1}$$

Nesteiden sekoittumiseen ei liity työtä, joten nesteen 1 luovuttama lämpö = nesteen 2 saama lämpö. Oletetaan $T_1 > T_2$ olkoon loppulämpötila *T*.

$$m_1 c_p T_1 - m_1 c_p T = m_2 c_p T - m_2 c_p T_2 \;;$$

loppulämpötilaksi saadaan siis $T = \frac{m_1 c_p T_1 + m_2 c_p T_2}{m_1 c_p + m_2 c_p}$. Entropian muutokseksi saadaan integroimalla yhtälöstä (1) nesteelle 1

$$\Delta S_1 = m_1 c_p \int_{T_1}^{T} \frac{dT}{T} = m_1 c_p \ln\frac{T}{T_1}$$, nesteelle 2 vastaavasti $\Delta S_2 = m_2 c_p \ln\frac{T}{T_2}$.

Lasketaan entropian muutokset yhteen ja sijoitetaan *T*:

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 = \nu c_p \ln\left(\frac{T}{T_1} \times \frac{T}{T_2}\right).$$

Osoitetaan, että logaritmin argumentti on suurempi kuin 1 :

$$T_1 + T_2 > 2\sqrt{T_1 T_2} \quad \Leftrightarrow T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2 > 4T_1T_2 \Leftrightarrow T_1^2 + T_2^2 - 2T_1T_2 > 0 \Leftrightarrow (T_1 - T_2)^2 > 0.$$

3. Systeemissä on N hiukkasta joiden mahdolliset energiatilat ovat ε ja $-\varepsilon$. Olettaen, että systeemin kokonaisenergia on U osoita, että lämpötila voidaan esittää sisäenergian avulla muodossa

$$\frac{1}{T} = \frac{k}{2\varepsilon} \ln\frac{N - U/\varepsilon}{N + U/\varepsilon}.$$

Totea, että lämpötila on positiivinen (negatiivinen) jos sisäenergia on negatiivinen (positiivinen).

Ratkaisu:

Partitiofunktioksi saadaan
$Z = e^{-\varepsilon/kT} + e^{\varepsilon/kT}$

Derivoimalla
$$\frac{d}{dT}\ln Z = -\left(\frac{\varepsilon}{kT^2}\right)\frac{e^{\varepsilon/kT} - e^{-\varepsilon/kT}}{e^{\varepsilon/kT} + e^{-\varepsilon/kT}}$$

joten sisäenergiaksi saadaan
$$U = kNT^2\frac{d}{dT}\ln Z = -N\varepsilon\frac{e^{\varepsilon/kT} - e^{-\varepsilon/kT}}{e^{\varepsilon/kT} + e^{-\varepsilon/kT}} = -N\varepsilon\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

missä merkittiin $x = e^{\varepsilon/kT}$. Ratkaistaan x
$$x^2 = \frac{N - U/\varepsilon}{N + U/\varepsilon} \quad .$$

Sijoittamalla x ja ottamalla logaritmi saadaan
$$\frac{1}{T} = \frac{k}{2\varepsilon}\ln\frac{N - U/\varepsilon}{N + U/\varepsilon} \quad .$$

Josta havaitaan, että $T<0$ kun $U>0$ ja päinvastoin . Negatiiviset lämpötilat ovat yleisesti mahdollisia systeemille, jossa *energiatasot ovat ylhäältä rajoitettuja*. (Esim. kaasumolekyylin energiat eivät ole - yksittäisellä molekyylillä voi olla kuinka korkea energia tahansa).

4. a) Atomin palatessa viritetystä tilasta perustilaan fotoniemissiolla havaittiin emittoituvan spektriviivan leveydeksi $\Delta E \cong 1{,}0 \times 10^{-6}$ eV. Mikä oli tilan elinaika? b) Laske vetyatomin rekyylienergia sähköisessä dipolitransitiossa $3d \to 2p$.

Ratkaisu

Heisenbergin yhtälöstä

$$\Delta t = \hbar / \Delta E = 6.6 \times 10^{-10}\,\mathrm{s}\ .$$

b) Rekyylienergian on suurella tarkkuudella

$$\frac{\left(E_\gamma / c\right)^2}{2M}$$

missä E_γ on fotonin energia ja M atomin massa. Tässä transitioenergia on

$$E_\gamma = E_0\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right) = 1.9\mathrm{eV}\ .$$

Rekyylienergiaksi saadaan sijoittamalla $1{,}9\times 10^{-9}\,\mathrm{eV}$.

5. Osoita, että Comptonin sironnassa sironneen fotonin suunta θ ja rekyylielektronin suunta (fotonin alkuperäiseen suuntaan nähden) toteuttavat yhtälön

$$\cot\frac{\theta}{2} = \left(1+\frac{\lambda_C}{\lambda}\right)\tan\phi$$

missä λ on siroavan fotonin aallonpituus.

Ratkaisu

Comptonin ehto aallonpituuden muutokselle

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c\left(1-\cos\theta\right)\ . \tag{1}$$

Liikemäärän säilymisen perusteella:

$$\left.\begin{aligned} p_\gamma'\sin\theta &= p_e\sin\phi \\ p_\gamma'\cos\theta - p_\gamma &= p_e\cos\phi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan\phi = \frac{p_\gamma'\sin\theta}{p_\gamma - p_\gamma'\cos\theta}\ . \tag{2}$$

Sijoittamalla fotonien aallonpituudet $p_\gamma = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ saadaan

$$\tan\phi = \frac{\frac{1}{\lambda'}\sin\theta}{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}\cos\theta} = \frac{\lambda\sin\theta}{\lambda' - \lambda\cos\theta}\ . \tag{3}$$

Sijoittamalla (1) yhtälöön (3)

$$\tan\phi = \frac{\lambda\sin\theta}{\lambda_c\left(1-\cos\theta\right)+\lambda-\lambda\cos\theta} = \frac{\lambda}{\lambda+\lambda_c}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\ . \tag{4}$$

Trigonometrian mukaan $\cot\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$. Sijoittamalla tämä yhtälöön (4) ja järjestelemällä saadaan

$$\cot\frac{\theta}{2} = \left(1+\frac{\lambda_C}{\lambda}\right)\tan\phi\ .$$

6. Voidaan osoittaa, että sähköisen dipolitransition $m \to n$ todennäköisyys aikayksikköä kohden on potentiaalilaatikossa sijaitsevalle hiukkaselle

$$W_{m\to n} = C\left|\int_0^a \phi_m^* x \phi_n dx\right|^2 ,$$

missä C on eräs vakio. Mikä ehto kvanttilukujen m ja n on toteuttava, jotta transitiotodennäköisyys olisi nollasta poikkeava?

Ratkaisu

Olkoon potentiaalilaatikon leveys a vrt luennot. Tarkastellaan integraalia

$$\int_0^a \phi_m^* x \phi_n dx = \left(\frac{2}{a}\right)\int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a} x \sin\frac{n\pi x}{a} dx \ . \tag{1}$$

Koska oletamme, että $m \neq n$ voimme kirjoittaa

$$\int_0^a \phi_m^* x \phi_n dx = +\left(\frac{2}{a}\right)\int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a}(x-\frac{a}{2})\sin\frac{n\pi x}{a} dx \tag{2}$$

sillä $\int_0^a \phi_m^* \frac{a}{2}\phi_n dx = \frac{a}{2}\int_0^a \phi_m^* \phi_n dx = 0$ ortonormeerauksen $\int_0^a \phi_m^* \phi_n dx = \delta_{mn}$ perusteella.

Integrandin kaikilla kolmella tekijällä yhtälössä (2) on nyt hyvin määrätty pariteetti :

$\sin\frac{m\pi x}{a}$	parillinen jos m pariton pariton jos m parillinen
$(x-\frac{a}{2})$	pariton
$\sin\frac{n\pi x}{a}$	parillinen jos n pariton pariton jos n parillinen

Integrandi on siis parillinen jos $m+n$ on pariton tai pariton jos $m+n$ on parillinen. Intgraali = 0 jos integrandi on pariton, joten valintasäännöksi saadaan

$$m-n=1,3,5,..$$

ts alku- ja lopputilalla on vastakkainen pariteetti.

VAKIOITA

$m_e = 9{,}1091\times10^{-31}$ kg	$m_p = 1{,}6725\times10^{-27}$ kg	$m_n = 1{,}6748\times10^{-27}$ kg	amu $= 1{,}6605\times10^{-27}$ kg
$e = 1{,}6021\times10^{-19}$ C	$c = 2{,}9979\times10^{8}$ m/s	$\hbar = 1{,}0545\times10^{-34}$ Js	$\mu_B = 9{,}2732\times10^{-24}$ JT^{-1}
$\varepsilon_0 = 8{,}8544\times10^{-12}$ C^{2}N^{-1}m^{-2}	$K_e = 1/4\pi\varepsilon_0$	$\mu_0 = 1{,}2566\times10^{-6}$ mkgC^{-2}	$K_m = \mu_0/4\pi$
$\gamma = 6{,}670\times10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}	$N_A = 6{,}0225\times10^{23}$ mol^{-1}	$R = 8{,}3143$ JK^{-1}mol^{-1}	k=1,3805×10^{-23} JK^{-1}