S-114.1327 Fysiikka III (Est) Tentti 18.5.2006

1. välikokeen alue

1. Osoita, että harmonisen oskillaattorin keskimääräisen energiatilan kvanttiluku n lämpötilassa T on

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}.$$

Opastus: sovella Maxwell Boltzmann jakaumaa ja käytä suppenevan geometrisen sarjan summaa.

Ratkaisu

Oletetaan, että systeemissä on 1 oskilaattori ja lasketaan sen keskimääräinen energia. Opetusmonisteen luvun 5.6 mukaan yhden oskillaattorin energia on

$$U = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 + \hbar\omega_0 \left(\frac{1}{e^{\hbar\omega_0/kT} - 1} \right).$$

Tämän tulee olla yhtäsuuri kuin $\hbar\omega_0 / 2 + \langle n \rangle \hbar\omega_0$. Ratkaisemalla keskimääräisen kvanttiluvun $\langle n \rangle$ suhteen saamme

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}.$$

2. Eräässä termodynaamisessa tasapainossa olevassa systeemissä, joka noudattaa Maxwell-Boltzmann-statistiikkaa, saatiin kokeellisesti tilojen energioille ja niiden suhteellisille miehitys-todennäköisyyksille arvot: 2.3 meV (63%), 10.9 meV (23%), 19.5 meV (8,5%) ja 28.1 meV (3.1%) vastaavasti. ***Arvioi*** systeemin lämpötila näiden kokeellisten tulosten perusteella.

Ratkaisu

Olkoon tilat 1, 2, 3, 4. Suhteellinen todennäköisyys ensimmäisen ja toisen tilan välillä on

$$\frac{n_2}{n_1} = e^{-(E_2 - E_1)/kT} = \frac{0.23}{0.63} = 0.365.$$

Tästä seuraa

$$-\left(\frac{E_2 - E_1}{kT} \right) = \ln(0.365) \Rightarrow T = \frac{E_1 - E_2}{k \ln(0.365)} = 99.0 \text{ K}.$$

Vastaavasti muille tiloille saadaan

$$T = \frac{E_1 - E_3}{k \ln(0.1349)} = 99.6 \text{ K}$$

$$T = \frac{E_1 - E_4}{k \ln(0.0492)} = 99.4 \text{ K}.$$

Lämpötilat eivät ole tarkalleen samat sillä miehitystodennäköisyydet on määritelty kokeellisesti, jolloin niihin sisältyvän epätarkkuuden takia suhteelliset todennäköisyydet eivät anna tarkalleen samaa lämpötilaa. Eräs tapa parantaa tarkkuutta on laskea esimerkiksi näin saatujen lämpötilojen keskiarvo, jolloin osa satunnaisista mittausvirheistä eliminoituu. Lämpötilojen keskiarvoksi saadaan $T = 99.3$ K.

3. Fotoni, jonka aallonpituus on $1{,}0\times10^{-10}$m Compton-siroaa paikallaan olevasta elektronista 90° kulmaan fotonin alkuperäiseen liikesuuntaan nähden. Laske sironneen fotonin allonpituus, elektronin saama kineettinen energia ja elektronin liikesuunta fotonin alkuperäiseen suuntaan nähden.

Ratkaisu

Sironneen fotonin aallonpituus saadaan Comptonin kaavasta $\lambda' - \lambda = \lambda_C\left(1-\cos\theta\right)$, missä θ on fotonien aaltovektoreiden välinen kulma. Sijoittamalla saadaan sironneen fotonin aallonpituudeksi $\lambda' = 1{,}02426\times10^{-10}$ m $\approx 102{,}4$ pm.

Elektronin saama kineettinen energia on fotonien energioiden erotus:

$$E_K = \hbar\omega - \hbar\omega' = 2\pi\hbar c\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = 290 \text{ eV.}$$

Fotonin alkuperäiseen liikesuuntaan nähden kohtisuorassa suunnassa sironneen fotonin ja elektronin liikemäärät ovat liikemäärän säilymislain perusteella yhtä suuret ja vastakkaissuuntaiset. Elektronia voidaan pitää epärelativistisena, jolloin liikemäärä saadaan yhtälöstä $p_e = \sqrt{2m_e E_K}$. Merkitsemällä liikemäärät yhtä suuriksi saadaan

$$p'\sin\theta = p_e\sin\phi \Rightarrow \phi = \arcsin\left[\frac{p'\sin\theta}{p_e}\right] = \arcsin\left[\frac{\left(E'/c\right)\sin\theta}{p_e}\right] = 44{,}3.$$

missä siis ϕ rekyylielektronin liikesuunta fotonin alkuperäisen suunnan suhteen. Pilkutetut suureet viittaavat sironneeseen fotoniin.

2. välikokeen alue

4. Hiukkanen liikkuu pizzalaatikossa, jonka sivujen pituuden ovat a, a ja a/10 laske kuuden alimman tason energiat ja kunkin tason degeneraatio. Esitä energiat hiukkasen massan *m* ja suureen *a* avulla.

Ratkaisu

Energiat saadaan kolmiulotteiselle äärettömän kovalle potentiaalille yhtälöstä:

$$E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{a^2} + \frac{n_3^2}{(a/10)^2}\right) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\left(n_1^2 + n_2^2 + 100n_3^2\right).$$

Perustila $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ $E = \dfrac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}102 = 102E_0$ ei degeneraatiota.

1. viritetty tila

$n_1 = 1; n_2 = 2; n_3 = 1$ ja $n_1 = 2; n_2 = 1; n_3 = 1$ $E = 105E_0$, kahdesti degeneroitunut.

2. viritetty tila

$n_1 = n_2 = 2; n_3 = 1$ $E = 108E_0$ ei degeneraatiota.

3. viritetty tila

$n_1 = 1; n_2 = 3; n_3 = 1$ ja $n_1 = 3; n_2 = 1; n_3 = 1$ $E = 110E_0$, kahdesti degeneroitunut.

4. viritetty tila

$n_1 = 3; n_2 = 2; n_3 = 1$ ja $n_1 = 2; n_2 = 3; n_3 = 1$ $E = 113E_0$, kahdesti degeneroitunut.

5. viritetty tila

$n_1 = 1; n_2 = 4; n_3 = 1$ ja $n_1 = 4; n_2 = 1; n_3 = 1$ $E = 117E_0$, kahdesti degeneroitunut.

5. Rataliikkeen perustilassa CO molekyylin ominaistaajuus on $\omega_0 = 4{,}09 \times 10^{14}\,\mathrm{s}^{-1}$ ja ytimien tasapainoetäisyys $R_0 = 0{,}112\,\mathrm{nm}$. Laske a) kuinka monta pyörimistasoa mahtuu värähtelytasojen n = 0 ja n = 1 väliin, b) ensimmäisen viritetyn värähtelytason ja ensimmäisen viritetyn pyörimistason alimmasta tasosta laskettujen viritysenergioiden suhde.

Ratkaisu

Molekyylin elektronitilan energia koostuu rataliikkeen (ja magneettisiin vuorovaikutuksiin liittyvästä) energiasta E_{el} , värähtelyenergiasta E_{vib} ja rotaatioenergiasta E_{rot}.

$$E = E_{el} + (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_0 + \frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2}\ell(\ell+1)$$

missä ω_0 on värähtelyn ominaistaajuus, μ molekyylin atomien suhteellinen massa ja r_0 niiden tasapainoetäisyys.

a) Kahden alimman värähtelytason ero on

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 - \frac{1}{2}\hbar\omega_0 = \hbar\omega_0$$

Alimman rotataatiotason energia = 0, joten lasketaan sen rotaatiotilan kulmaliikemäärän kvanttiluku ℓ, jonka energia on lähinnä pienempi kuin yo. energiaero

$$\hbar\omega_0 = \frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2}\ell(\ell+1) \Rightarrow \ell(\ell+1) = \frac{\omega_0 2\mu r_0^2}{\hbar} = \frac{2M_C M_O \omega_0 r_0^2}{(M_C + M_O)\hbar} \approx 1108 \equiv m$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4m}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4m+1} - 1\right) = 32{,}8 \approx 32$$

b) Ylläolevista energian lausekkeista saadaan

$$\frac{\hbar\omega_0}{\frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2}\cdot 1\cdot(1+1)} = \frac{\mu r_0^2 \omega_0}{\hbar} \approx 554$$

6. Tarkastellaan elektronitilaa 2*p*, jossa kulmaliikemäärän kvanttiluku (eli sivukvanttiluku) $l = 1$. a) Mikä on suureen L_z suurin ja pienin mahdollinen arvo yksiköissä $\hbar$ b) Mikä on suureen L (kulmaliikemäärän itseisarvo) arvo yksiköissä $\hbar$? c) Mitkä ovat vektorin $\boldsymbol{L}$ ja z-akselin välisen kulman mahdolliset arvot.

Ratkaisu

a) Magneettisen kvanttiluvun mahdolliset arvot ovat

$$m_l = -1, 0, 1.$$

Suureen $L_z = m_l \hbar$ suurin arvo on siis $1\hbar$ ja pienin -$1\hbar$.

b) Kulmaliikemäärän itseisarvon määrää yksikäsitteisesti kulmaliikemäärän kvanttiluku *l*.
Tässä $l = 1$, joten

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar.$$

c) Vektorin $\boldsymbol{L}$ ja z-akselin välinen kulma on

$$\arccos\left(\frac{L_z}{L}\right) = \arccos\left(\frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}\right) = \arccos\left(\frac{m_l}{\sqrt{2}}\right).$$

Sijoittamalla $m_l = -1, 0, 1,$ saadaan

$$\theta = 135,\ 90.0,\ \text{ja}\ 45,0$$

astetta vastaavasti.

VAKIOITA

$m_e = 9{,}1091\times10^{-31}$ kg	$m_p = 1{,}6725\times10^{-27}$ kg	$m_n = 1{,}6748\times10^{-27}$ kg	amu = $1{,}6605\times10^{-27}$ kg
$e = 1{,}6021\times10^{-19}$ C	$c = 2{,}9979\times10^{8}$ m / s	$\hbar = 1{,}0545\times10^{-34}$ Js	$\mu_B = 9{,}2732\times10^{-24}\ \mathrm{JT^{-1}}$
$\varepsilon_0 = 8{,}8544\times10^{-12}\ \mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$	$K_e = 1/4\pi\varepsilon_0$	$\mu_0 = 1{,}2566\times10^{-6}\ \mathrm{mkgC^{-2}}$	$K_m = \mu_0/4\pi$
$\gamma = 6{,}670\times10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$	$N_A = 6{,}0225\times10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$	$R = 8{,}3143\ \mathrm{JK^{-1}mol^{-1}}$	$k = 1{,}3805\times10^{-23}\ \mathrm{JK^{-1}}$