S-114.1327 Fysiikka III (EST) Tentti 14.8.2006

1. Kesällä, kun ulkoilman lämpötila on 35 °C, halutaan huoneilman lämpötila pitää 18 °C:ssa. Tiedetään, että ympäristöstä, mukaanluettuina huoneessa olevat ihmiset sekä erilaiset laitteet, virtaa huoneeseen lämpöä 418 W teholla. Mikä on oltava jäähdytyskoneen tehon, jotta mainittua lämpötilaa voitaisiin ylläpitää?

Ratkaisu: $T_Y = 35$ °C, $T_A = 18$ °C, $P_Q = 418$ W

Jäähdytyskoneen tehokerroin on

$$\varepsilon_J = \frac{T_A}{T_Y - T_A} \approx \frac{(18+273)\,\mathrm{K}}{(35-18)\,\mathrm{K}} \approx 17{,}1$$

Jäähdytyskoneen tehon tulee siis olla

$$P_J = \frac{P_Q}{\varepsilon_J} \approx \frac{418\,\mathrm{W}}{17{,}1} \approx \underline{\underline{25\,\mathrm{W}}}$$

2. Neljän tunnistettavissa olevan hiukkasen mikrokanonisen joukon mahdolliset energiatasot ovat 0, ε, 2ε, 3ε, 4ε, …, jotka kaikki ovat degeneroitumattomia. Systeemin kokonaisenergia on 6ε. Esitä kaikki mahdolliset partitiot eli makrotilat. Määritä todennäköisin partitio. Esitä myös energiatasojen keskimääräiset miehitysluvut.

Ratkaisu

Laaditaan taulukko monisteen esimerkin 3.1. tapaan ($\bar{n}_j = \sum_k n_{jk} \Big/ \sum_k P_k$):

Partitio eli makrotila

Energia / k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\bar{n}_j$
6ε	●										0,0476
5ε		●									0,1429
4ε			●	●							0,2857
3ε					● ●	●	●				0,4762
2ε			●			●		● ● ●	● ●		0,7143
ε		●		● ●		●	● ● ●		● ●		1,0000
0	● ● ●	● ●	● ●	●	● ●	●		●			1,3333
P_k	4	12	12	12	6	24	4	4	6		

Alimmalla rivillä olevat partitioiden todennäköisyydet saadaan yhtälöstä

$P_k = N!\prod_i \frac{1}{n_i!} g_i^{n_i}$, missä indeksi i numeroi energiatasot. Nyt g_i = 1 jokaiselle energiatasolle. Siten saadaan esimerkiksi

$$P_1 = \frac{4!}{3!1!} = 4, \quad P_2 = \frac{4!}{2!1!1!} = 12 \text{, jne.}$$

Mikrotilojen kokonaislukumäärä on $\sum_{k=1}^{9} P_k = 84$. Todennäköisin partitio on partitio k = 6, jolle P_6 = 24 eli partitio sisältää 24 mikrotilaa. Ruudukon oikealla puolella ovat energiatasojen keskimääräiset miehitysluvut. Voidaan todeta, että niiden summa on = hiukkasten kokonaislukumäärä = 4.

3. Tarkastellaan ^{79}Br ^{19}F – molekyyliä. Atomien tasapainoetäisyys (sidospituus) on r_o = 0,176 nm. a) Laske neljän ensimmäisen rotaatiotason energia. b) Määritä transitioissa l = 0 → l = 1 ja l = 1 → l = 2 absorboituvien fotonien energiat. c) Laske värähtelytasojen energiaero. Vertaa a- ja c-kohdan tuloksia keskenään.

Ratkaisu

Rotaatioenergia on kvantittunut monisteen yhtälön (6.11) mukaisesti:

$$E_r = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1), \quad l = 0,1,2,3,\ldots.$$

Hitausmomentti I on $I = \mu r_o^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_o^2$. Nyt m_1 = 78,918 u, m_2 = 18,998 u.

$$\text{Siten } I \approx \frac{79,918 \cdot 18,998}{79,918 + 18,998} \cdot 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \left(0,176 \cdot 10^{-9}\right)^2 \text{ m}^2 \approx 7,895 \cdot 10^{-46} \text{ kg m}^2 .$$

ja

$$E_r \approx \frac{\left(1,0546 \cdot 10^{-34} \text{Js}\right)^2}{2 \cdot 7,895 \cdot 10^{-46} \text{kg m}^2} l(l+1) \approx 7,044 \cdot 10^{-24} \text{J} \cdot l(l+1).$$

Saadaan seuraavat arvot:

l	E_{rl} / μeV
0	0
1	87,9
2	264
3	528

b) Energiat saadaan suoraan eo. taulukosta:
l = 0 → l = 1: E_{abs} = 87,9 μeV.
l = 1 → l = 2: E_{abs} = (264 – 87,9) μeV = 176 μeV.

Fotonien aallonpituudet ovat $\lambda_{abs} = \dfrac{hc}{E_{abs}} \approx 1{,}41\,\mathrm{cm}$ ja $0{,}705\,\mathrm{cm}$, vastaavasti.

Transitiossa $l \to l + 1$ absorboituvan fotonin energia saadaan laskettua suoraan yhtälöstä

$$E_{abs} = \frac{\hbar^2}{2I}\left[(l+1)(l+1+1) - l(l+1)\right] = \frac{\hbar^2}{I}(l+1),$$

missä l on alemman tason kvanttiluku.

c) Värähtelytasojen energiaero on $\Delta E_v = \hbar\omega_0 = \hbar\sqrt{\dfrac{k}{\mu}}$. Jousivakio saadaan inonisidoksen potentiaalienergian lausekkeesta (ks. opetusmoniste)

$$E_p(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{b}{r^9},$$

seuraavasti. Asettamalla potentiaalienergian derivaatta nollaksi tasapainoetäisyydellä r_0 saadaan

$$b = e^2 r_0^8 / 36\pi\varepsilon_0$$

Sijoittamalla tämä potentiaalienergian lausekkeeseen ja kehittämällä potentiaalienergia Tylorin sarjaksi tasapainoaseman ympäristössä saadaan neliölliseksi termiksi $(1/2)k(r - r_0)^2$ missä

$$k = \frac{2e^2}{\pi\varepsilon_0 r_0^3} \approx 42\,\mathrm{Nm}.$$

Sijoittamalla tämä taajuuden lausekkeeseen saadaan $\Delta E_v = \hbar\omega_0 = 27\,\mathrm{meV}$.

4. a) Määritä elektronin kolme alinta energiatasoa 0,600 nm levyisessä yksiulotteisessa potentiaalilaatikossa. b) Laske niiden fotonien energia ja aallonpituus, jotka emittoituvat transitioissa eo. potentiaalilaatikon energiatasolta 3 energiatasolle 2.

Ratkaisu

a) a = 0,600 nm. $E_n = \dfrac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$. n = 1, 2 ja 3

$$E_1 \approx \frac{1^2 \cdot \pi^2 \cdot \left(1{,}0545 \cdot 10^{-34}\right)^2\ \mathrm{J^2s^2}}{2 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg} \cdot \left(0{,}600 \cdot 10^{-9}\right)^2\ \mathrm{m}^2} \approx 1{,}6734 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} \approx \underline{\underline{1{,}04\,\mathrm{eV}}}$$

$$E_2 = 4E_1 \approx \underline{\underline{4{,}18\,\mathrm{eV}}}$$

$$E_3 = 9E_1 \approx \underline{\underline{9{,}40\,\mathrm{eV}}}$$

b) $E_{fotoni} = h\nu = E_3 - E_2 \approx 9{,}400\,\mathrm{eV} - 4{,}178\,\mathrm{eV} \approx 5{,}222\,\mathrm{eV} \approx \underline{\underline{5{,}22\,\mathrm{eV}}}$

$$\lambda = \frac{hc}{E_{fotoni}} \approx \frac{6,626\cdot 10^{-34}\,\text{Js}\cdot 2,998\cdot 10^{8}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{5,222\cdot 1,602\cdot 10^{-19}\,\text{J}} \approx \underline{\underline{237\text{ nm}}}\,.$$

5. Hiukkanen voi liikkua *x*-akselilla välillä [x = 0 , x = 1]. Sen aaltofunktio on $\Psi(x,t) = Cxe^{-iEt/\hbar}$. a) Määritä vakion C arvo siten, että aaltofunktio on normitettu. b) Määritä todennäköisyys sille, että hiukkanen on välillä [x = 0,4 , x = 0,6].

Ratkaisu

a) Normitusehto: $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Psi \, dx = 1$.

Nyt aaltofunktio on

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} Cxe^{-iEt/\hbar}, \text{ kun } 0 \le x \le 1 \\ 0, \text{ kun } x < 0 \text{ ja kun } x > 1 \end{cases}.$$

Normitusehto saa täten muodon

$$\int_0^1 C^2 x^2 dx = 1,$$

josta

$$C^2 \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{3}\,.$$

Normitettu aaltofunktio on siis $\Psi(x,t) = \sqrt{3}xe^{-iEt/\hbar}$.

b) Todennäköisyys sille, että hiukkanen on välillä [0,4, 0,6] , on

$$P_{\Delta x} = \int_{0,4}^{0,6} \Psi^* \Psi \, dx = 3\int_{0,4}^{0,6} x^2 dx = 3 \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_{0,4}^{0,6} = 3 \cdot \left(\frac{0,6^3}{3} - \frac{0,4^3}{3} \right) \approx \underline{\underline{0,152}}\,.$$

6. a) Atomin palatessa viritetystä tilasta perustilaan fotoniemissiolla havaittiin emittoituvan spektriviivan leveydeksi $\Delta E \cong 1,0 \times 10^{-6}$ eV. Mikä oli tilan elinaika? b) Laske vetyatomin rekyylienergia sähköisessä dipolitransitiossa $3d \rightarrow 2p$.

Ratkaisu

Heisenbergin yhtälöstä

$$\Delta t = \hbar / \Delta E = 6.6 \times 10^{-10}\,\text{s}\,.$$

b) Rekyylienergian on suurella tarkkuudella

$$\frac{\left(E_\gamma / c\right)^2}{2M}$$

missä E_γ on fotonin energia ja M atomin massa. Tässä transitioenergia on

$$E_\gamma = E_0\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right) = 1.9\text{eV} .$$

Rekyylienergiaksi saadaan sijoittamalla $1,9\times 10^{-9}\,\text{eV}$.

VAKIOITA

$m_e = 9,1091\times 10^{-31}$ kg	$m_p = 1,6725\times 10^{-27}$ kg	$m_n = 1,6748\times 10^{-27}$ kg	amu $= 1,6605\times 10^{-27}$ kg
$e = 1,6021\times 10^{-19}$ C	$c = 2,9979\times 10^{8}$ m/s	$\hbar = 1,0545\times 10^{-34}$ Js	$\mu_B = 9,2732\times 10^{-24}\,\text{JT}^{-1}$
$\varepsilon_0 = 8,8544\times 10^{-12}\,\text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$	$K_e = 1/4\pi\varepsilon_0$	$\mu_0 = 1,2566\times 10^{-6}$ mkgC^{-2}	$K_m = \mu_0 / 4\pi$
$\gamma = 6,670\times 10^{-11}\,\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$	$N_A = 6,0225\times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$	$R = 8,3143$ JK^{-1}mol^{-1}	k=1,3805$\times 10^{-23}$ JK^{-1}