S-114.1100 Laskennallinen tiede / Computational Science
Lopputentti / Final Exam 08.09.2009

Laskin sallittu, ei muuta materiaalia. / Calculator is allowed, no other material.
Kaikki paperit on palautettava. / All exam papers must be returned.

Tehtävä 1. (6p.) Kuvaa/johda bisektiomenetelmä lähtien väliarvolauseesta. Johda, kuinka numeerinen virhe pienenee iteraatioiden lukumäärän funktiona? Miten perusalgoritmi muutetaan modifioiduksi bisektiomenetelmäksi?

Tehtävä 2. (6p.) Mitä ovat splinifunktiot ja mihin niitä käytetään? Miten johdat tarvittavat splinifunktiot (voit käyttää halutessasi jotain esimerkkifunktiota)?

Tehtävä 3. (6p) Selitä Gaussin kvadratuurin idea sekä miten sitä käytetään numeerisen integroinnin suorittamiseksi optimaalisella tavalla.

Tehtävä 4. (6p.) Miten tuotat satunnaislukuja, jotka noudattavat mielivaltaista todennäköisyysjakaumaa $p(x)$? Voit käyttää esimerkkinä Lorentzin jakaumaa, $p(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, $(-\infty < x < \infty)$. Mikä olisi vaihtoehtoinen tapa?

Tehtävä 5.
(a) (2p.) Mikä on Metropolis Monte Carlo -menetelmän periaate eli kuinka menetelmä toimii? Kuvaa algoritmi pääpiirteittäin.
(b) (4p.) Selitä ns. importance samplingin periaate ja toiminta Monte Carlo -menetelmässä käyttäen lähtökohtana integraalia

$$I = \int_0^1 f(x)dx,$$

missä $f(x)$ on jokin funktio. Muista määritellä muut mahdollisesti tarvitsemasi funktiot hyvin.

FOR THE QUESTIONS IN ENGLISH, PLEASE TURN PAGE.

Problem 1. (6p.) Describe/derive the bisection method. Derive how the numerical error diminishes as a function of number of iterations. How can the basic algorithm be changed into the modified bisection method?

Problem 2. (6p.) What are spline functions and what are they used for? How would you derive proper spline functions (you may use an example function as a starting point)?

Problem 3. (6p) Explain Gaussian quadrature's idea and how it is used for performing numerical integration in an optimal way.

Problem 4. (6p) How do you generate an ensemble of random numbers, whose distribution, $p(x)$, is arbitrary? You can use the Lorentzian distribution, $p(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, $(-\infty < x < \infty)$, as an example. What would be an alternative way?

Problem 5.
(a) (2p.) What is the Metropolis Monte Carlo method based on; i.e. how does the method work? Describe the main steps of the algorithm.
(b) (4p.) Explain the principle of importance sampling in the Monte Carlo method and show how it is applied to computing the value of the integral

$$I = \int_0^1 f(x)dx,$$

where $f(x)$ is some function. Be sure to define all other functions that you might need.

KYSYMYKSET SUOMEKSI KÄÄNTÖPUOLELLA.